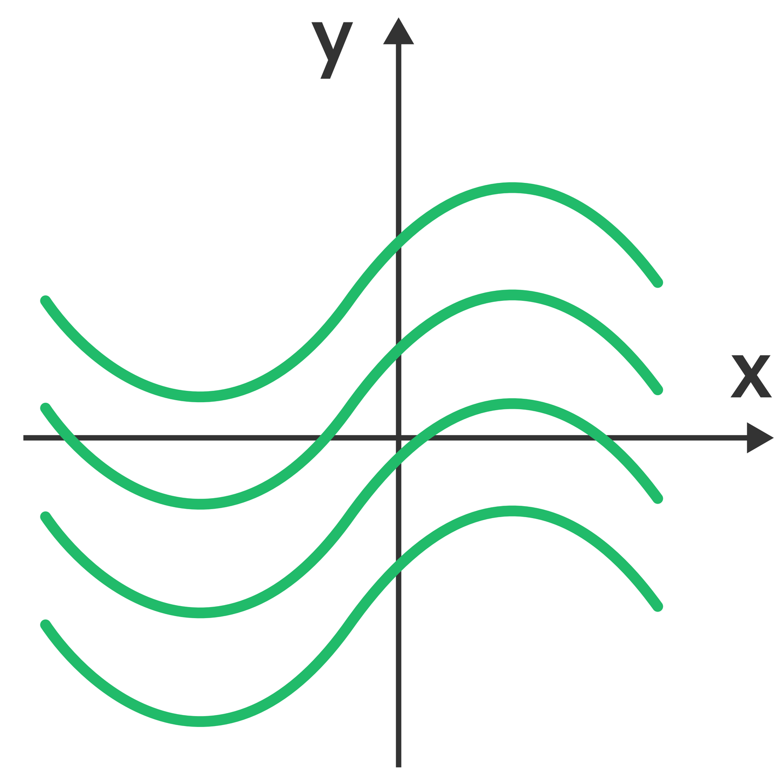
ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Понятие первообразной

Функция F(x) — **первообразная** для функции f (x) на данном промежутке, если для любого x из этого промежутка: F’(x) = F (x).

Основное свойство первообразных

Если F(x) — первообразная функции f(x), то и функция F(x) + C, где C — произвольная постоянная, также является первообразной функции f(x).



Графики всех первообразных функции f(x) получаются из графика какой-либо одной первообразной параллельными переносами вдоль оси y.

Неопределённый интеграл

Неопределённый интеграл функции f(x) - совокупность всех первообразных данной функции:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \text{ где } C \text{ — произвольная постоянная.}$$

Правила интегрирования

Если у функций f(x) и g(x) существуют производные, то

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx, \text{ где } c \text{ — } const$$

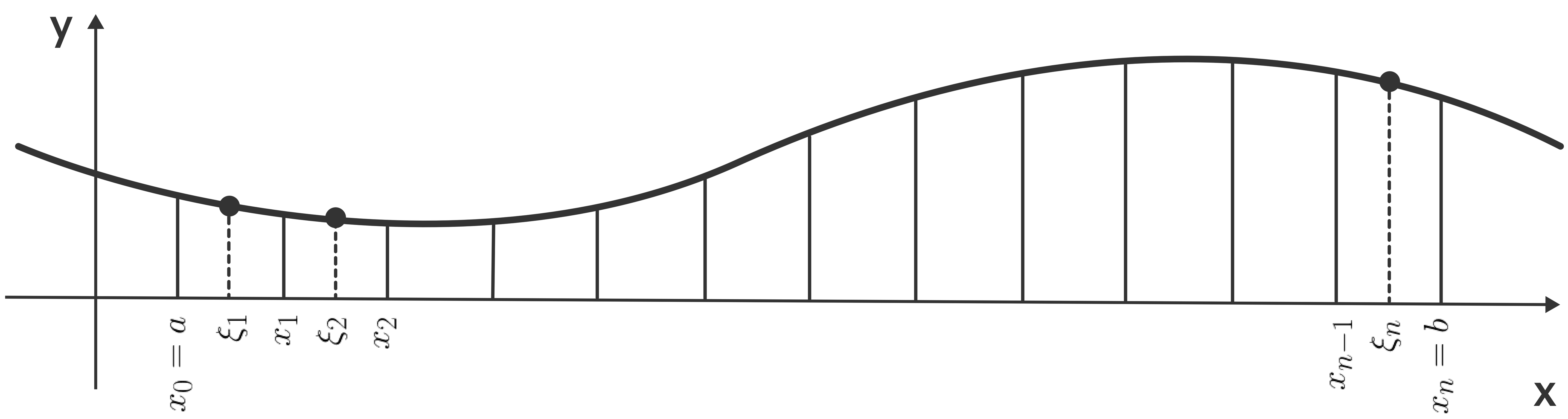
$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int (f(ax + b)dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C,\ a \neq 0$$

Определённый интеграл

Определённый интеграл от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ — предел интегральной суммы $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x$ при $n \to \infty$, где $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x \text{ , где } \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$$



Формула Ньютона-Лейбница

Для непрерывной функции $f(x)$:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \text{ , где } F(x) \text{ - первообразная функция } f(x)$$

Свойства определенного интеграла

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_a^b dx = b - a$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

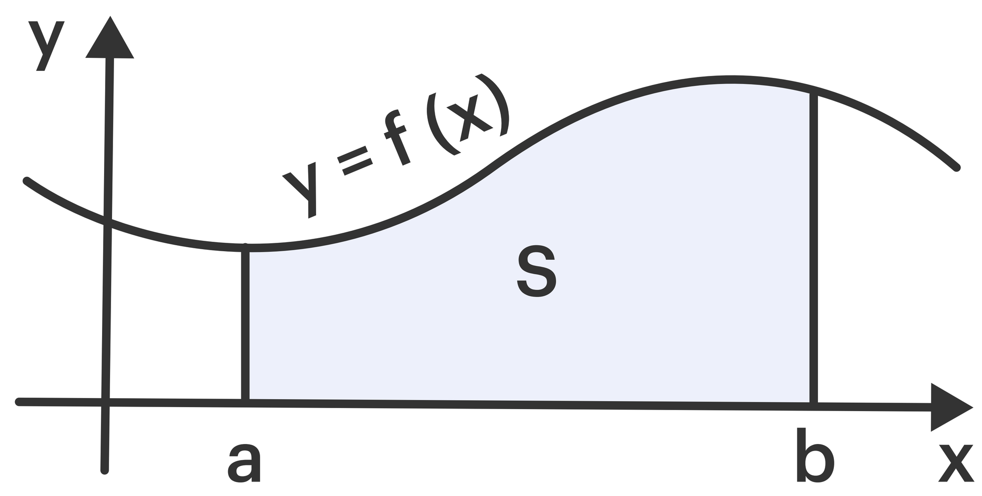
$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx \text{, где c - const}$$

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

Геометрический смысл определенного интеграла

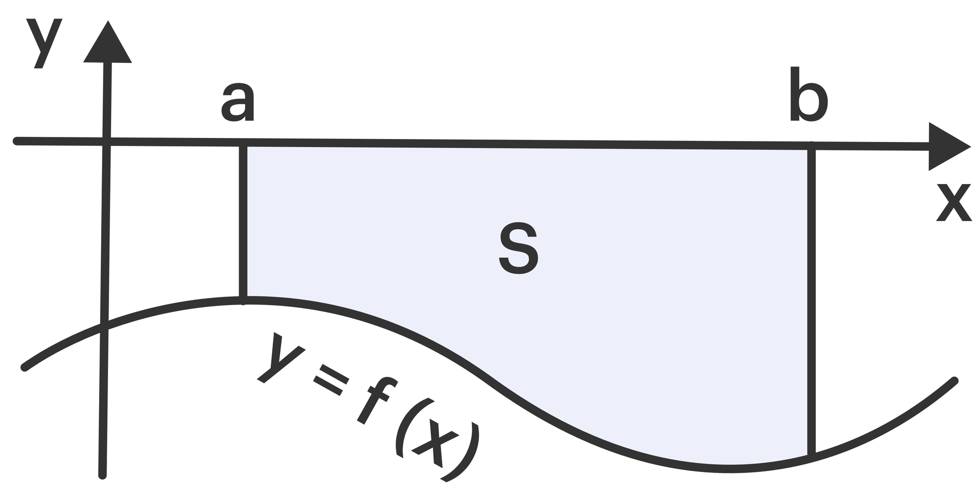
Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком неприрывной положительной на промежутке [a; b] функции f(x), осью x и прямыми x = a и x = b:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$



Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком неприрывной отрицательной на промежутке [a; b] функции f(x), осью x и прямыми x = a и x = b:

$$S = -\int_a^b f(x)\,dx$$



Физический смысл определенного интеграла

При прямолинейном движении перемещение S численно равно площади криволинейной трапеции под графиком зависимости скорости v от времени t.

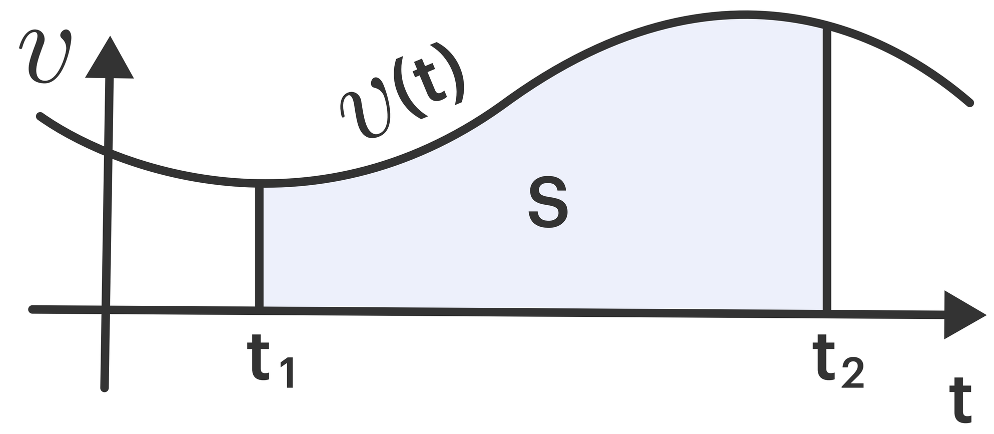


Таблица интегралов

$$\int 0dx = C$$

$$\int 1dx = x + C$$

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int tg\; x dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int ctg\; x dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -ctg\; x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = tg\; x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}dx = \frac{1}{a} arctg\;\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$